



Haniyeh Alidoust
academy



گسسته فصل اول



سال دوازدهم
ریاضی



www.academyalidoust.ir



haniyeh__alidousti



Haniyeh Alidoust
academy



۱ اگر عدد طبیعی به صورت $2n + 1$ بر ۵ بخش پذیر باشد، باقیمانده عدد طبیعی به صورت $14n^2 + 19n + 6$ بر عدد ۲۵، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۲ عدد پنج رقمی $N = \overline{a73b8}$ بر ۴۴ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم کوچکترین عدد N بر ۹، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۳ قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۴ به ازای بعضی از مقادیر، $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha \mid 11n + 3$ و $\alpha \mid 5n + 4$ و $\alpha \neq 1$ ، آنگاه تعداد اعداد دورقمی n در این حالت، کدام است؟
($\alpha \in \mathbb{N}$)

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۵ تعداد اعداد پنج رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \cong 3,16$)

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۶ میانگین بزرگترین و کوچکترین عدد سه رقمی به صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشد، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۷ اگر تعداد مقسوم علیه های عدد صحیح $x = 6^m \times 10^n$ ، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم علیه های $15x$ کمتر باشد، اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقدار ممکن برای x ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۸ اگر m کوچکترین عدد طبیعی باشد که $m!$ بر ۳۰ بخش پذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم m^{33} بر ۳۱ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۹ نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$ قرار دارند. اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

۱۰ با قرار دادن عدد سه رقمی $\overline{(a \circ a)}$ بین دو رقم مشابه a ، عدد جدید ساخته می شود. حداکثر چند عدد اول می تواند a را بشمارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۷) ۳ (۷) ۴ (۷) ۵ (۷)

پاسخنامه
تشریحی

گزینه ۱

$$2n+1 \equiv 0 \Rightarrow 2n \equiv -1 \equiv 4 \xrightarrow{(2,5)=1} n \equiv 2 \xrightarrow{\times 7} 7n \equiv 14 \xrightarrow{+6} 7n+6 \equiv 20 \equiv 0$$

$$14n^2 + 19n + 6 = (2n+1)(7n+6) = 5k \times 5k' = 25kk' \equiv 0$$

یعنی باقی مانده $14n^2 + 19n + 6$ بر ۲۵ برابر صفر است.

گزینه ۲ عددی بر ۴ بخش پذیر است که بر ۴ و ۱۱ بخش پذیر باشد.

$$1) N = \overline{a73b8} \equiv 0 \Rightarrow \overline{b8} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=2 \\ b=4 \\ b=6 \\ b=8 \end{cases} \quad (1)$$

$$2) N = \overline{a73b8} \equiv 11 \Rightarrow 8 - b + 3 - 7 + a \equiv 0 \Rightarrow a - b \equiv -4$$

$$a - b \equiv -4 \xrightarrow{(1)} \begin{cases} b=0 \Rightarrow a \equiv 7 \rightarrow a=7 \\ b=2 \Rightarrow a \equiv 9 \rightarrow a=9 \\ b=4 \Rightarrow a \equiv 0 \rightarrow a=0 \text{ غ ق ق} \\ b=6 \Rightarrow a \equiv 2 \rightarrow a=2 \checkmark \\ b=8 \Rightarrow a \equiv 4 \rightarrow a=4 \end{cases}$$

واضح است کمترین مقدار N به ازای $a=2$ و $b=6$ حاصل می شود.

$$N = \overline{a73b8} = \overline{27368} \stackrel{9}{=} 2+7+3+6+8 \equiv 26 \stackrel{9}{=} 8$$

باقی مانده تقسیم N بر ۹ برابر ۸ است.

گزینه ۳

تعداد خرید از کالای ۲۲۰ تومانی : x

تعداد خرید از کالای ۱۴۰ تومانی : y

$$220x + 140y = 19000 \xrightarrow{\div 20} 11x + 7y = 950 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 11x = -7y + 950 \Rightarrow 11x \stackrel{950=5}{=} 950 \xrightarrow{950=5} 11x \stackrel{5}{=} 5 \stackrel{5}{=} 5 + 4 \times 7 \stackrel{5}{=} 33$$

$$\xrightarrow{\div 11} x \stackrel{5}{=} 3 \Rightarrow x = 7k + 3 \quad (11,7)=1$$

حال در معادله (۱) مقدار $x = 7k + 3$ را صدق می دهیم:

$$11(7k+3) + 7y = 950 \Rightarrow 7y = -11 \times 7k + 917 \xrightarrow{\div 7} y = -11k + 131$$

حال باید تعداد جوابهای حسابی را یافته و اشتراک بگیریم:

$$0 \leq x \Rightarrow 0 \leq 7k+3 \Rightarrow -3 \leq 7k \Rightarrow -\frac{3}{7} \leq k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq k \quad (I)$$

$$0 \leq y \Rightarrow 0 \leq -11k + 131 \Rightarrow 11k \leq 131 \Rightarrow k \leq \frac{131}{11} = 11,9 \dots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq 11 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : 0 \leq k \leq 11 \rightarrow \text{مقدار } 12$$

چون برای k دوازده مقدار محاسبه شد پس مسئله ۱۲ جواب دارد.

گزینه ۴

$$\alpha | 11n+3 \xrightarrow{\times -5} \alpha | -5(11n+3) + 11(5n+4) \Rightarrow \alpha | -55n - 15 + 55n + 44 \Rightarrow \alpha | 29 \xrightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 29$$

چون $\alpha | 5n+4$ داریم:

$$29|5n+4 \Rightarrow 29|5n+4-29 \Rightarrow 29|5n-25 \Rightarrow 29|5(n-5) \Rightarrow 29|n-5 \Rightarrow n-5=29k \Rightarrow n=29k+5$$

به ازای $k=1, 2, 3$ برای n مقادیر دورقمی حاصل می شود.

گزینه ۵ با توجه به اینکه $18 = 2 \times 3^2$ است، پس عددی مضرب ۱۸ که مربع کامل نیز باشد، باید شامل مربع هر دو عدد ۲ و ۳ باشد، یعنی به صورت $(6k)^2$ نوشته شود. در این صورت داریم:

$$10^4 \leq (6k)^2 < 10^5 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 100 \leq 6k < 100\sqrt{10} \xrightarrow{\sqrt{10} \approx 3.16} 100 \leq 6k < 316 \xrightarrow{\div 6} 17 \leq k \leq 52$$

$$\text{تعداد جوابها} = (52 - 17) + 1 = 36$$

گزینه ۶ عددی بر ۱۲ بخش پذیر است که بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد. پس a یک رقم زوج غیر صفر است (عدد سه رقمی است). در ضمن b به گونه ای باید انتخاب شود که مجموع ارقام بر ۳ بخش پذیر باشد.

بزرگترین عدد: ۸۸۸ کوچکترین عدد: ۲۵۲

$$\bar{x} = \frac{252 + 888}{2} = \frac{1140}{2} = 570$$

گزینه ۷ تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد صحیح $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

بنابراین داریم:

$$x = 6^m \times 10^n = (2 \times 3)^m \times (2 \times 5)^n = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

$$x \text{ تعداد مقسوم علیه های } = (m+n+1)(m+1)(n+1)$$

$$15x = 3 \times 5 \times 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

$$15x \text{ تعداد مقسوم علیه های } = (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(m+n+1)(m+2)(n+2) - (m+n+1)(m+1)(n+1) = 35 \Rightarrow (m+n+1)[(m+2)(n+2) - (m+1)(n+1)] = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n+3) = 5 \times 7 \Rightarrow m+n = 4$$

$$x \text{ بزرگترین مقدار: } \begin{cases} m=0 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow \max(x) = 10^4 = 10000$$

$$x \text{ کوچکترین مقدار: } \begin{cases} m=4 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow \min(x) = 6^4 = 1296$$

$$\text{اختلاف در عدد} = 10000 - 1296 = 8704$$

گزینه ۸

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow \min(m) = 5$$

$$5^3 \equiv 1 \xrightarrow{\times 5^{110}} 5^{330} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{332} \equiv 25$$

گزینه ۹ اگر x عددی صحیح باشد آنگاه تنها در صورتی y نیز عددی صحیح خواهد بود که صورت کسر بر مخرج کسر بخش پذیر باشد. بنابراین:

$$y = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$x+2 | 3x-1, x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+2 | 3x-1 \\ x+2 | x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 | 3x-1 \\ x+2 | 3x+6 \end{cases} \Rightarrow x+2 | 7$$

$$\Rightarrow x+2 = -7 \text{ یا } 1 \text{ یا } 7$$

$$\Rightarrow x = -9 \text{ یا } -1 \text{ یا } 5$$

a	-3	-1	-9	5
b	10	-4	4	2

گزینه ۱۰

برای اینکه عدد $3(a \circ a)$ سه رقمی باشد، نتیجه می گیریم که a یکی از سه مقدار ۱، ۲ و ۳ را می تواند بپذیرد که در هر صورت حداکثر یک عامل اول دارد.



www.academyalidoust.ir



haniyeh__alidousti

